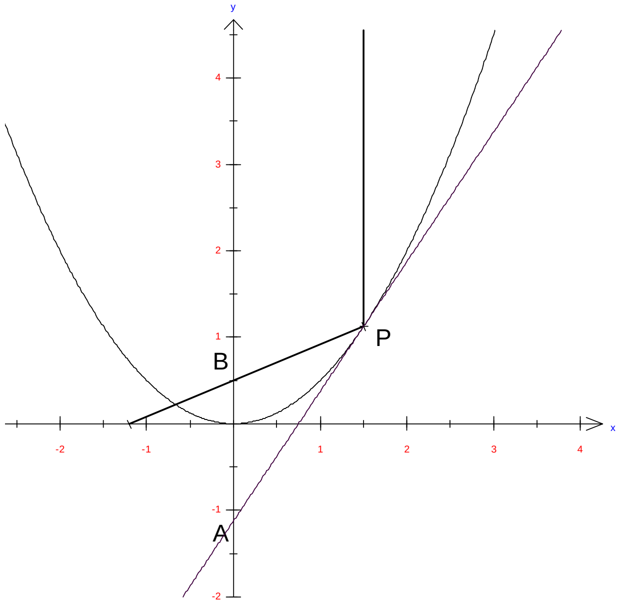
Berechnung des Brennpunktes einer Parabel

Beispiel



Gegeben sei die Parabel f mit der Gleichung
$f(x) = \frac{1}{2}x^2$
Gesucht ist der Brennpunkt der Parabel

1. Berechnung der Gleichung der Tangente an die Parabel im Punkt P(x_1 | $\frac{1}{2}x_1^2$)

a) Sei $t(x) = mx + b$ die Gleichung der Tangente im Punkt P

Da die gesuchte Tangente durch den Punkt P verläuft, müssen dessen Koordinaten die Tangentengleichung erfüllen:

$$t(x_1) = \frac{1}{2}x_1^2 \quad \Leftrightarrow \quad mx_1 + b = \frac{1}{2}x^2$$
$$\Leftrightarrow \quad b = \frac{1}{2}x_1^2 - mx_1$$

Also erhält man:

$$t(x) = mx + \frac{1}{2}x_1^2 - mx_1$$

b) Schnittpunktberechnung von f und g

$$f(x) = t(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}x^2 = mx + \frac{1}{2}x_1^2$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 2mx = x_1^2 - 2mx_1$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 2mx + m^2 = x_1^2 - 2mx_1 + m^2$$
$$\Leftrightarrow \quad (x - m)^2 = (x_1 - m)^2$$
$$\Leftrightarrow \quad |x - m| = x_1 - m$$

c) Da die Tangente mit der Parabel nur einen Punkt (den Berührpunkt) gemeinsam hat, muss die quadratische Gleichung genau eine Lösung besitzen. Das ist nur dann der Fall, wenn die rechte Seite den Wert 0 hat, also wenn $m = x_1$ gilt.

Somit lautet die Gleichung der gesuchten Tangente:

$$t(x) = x_1x + \frac{1}{2}x_1^2 - x_1x_1 \quad \Leftrightarrow \quad t(x) = x_1x - \frac{1}{2}x_1^2$$

2. Berechnung der y-Koordinate des Brennpunktes B (0 | y_B)

a) Nach Pythagoras gilt nun für die Längen der Strecken [P B] und [A B]:

$$|PB| = \sqrt{x_1^2 + (y_B - y_1)^2} \quad \text{und} \quad |AB| = y_B - b = y_B + \frac{1}{2}x_1^2$$

Mit $y_1 = \frac{1}{2}x_1^2 \Leftrightarrow x_1^2 = 2y_1$ folgt:

$$|PB| = \sqrt{2y_1 + y_B^2 - 2y_By_1 + y_1^2} \quad \text{und} \quad |AB| = y_B + y_1$$

b) Da das Dreieck APB mit der Basis [A P] gleichschenklig ist, gilt:

$$|AB| = |PB| \quad \Leftrightarrow \quad y_B + y_1 = \sqrt{2y_1 + y_B^2 - 2y_By_1 + y_1^2}$$
$$\Rightarrow \quad (y_B + y_1)^2 = 2y_1 + y_B^2 - 2y_By_1 + y_1^2$$
$$\Leftrightarrow \quad y_B^2 + 2y_By_1 + y_1^2 = 2y_1 + y_B^2 - 2y_By_1 + y_1^2$$
$$\Leftrightarrow \quad 4y_By_1 = 2y_1 \underset{y_1 \neq 0}{\Leftrightarrow} y_B = \frac{1}{2}$$

y_B ist also unabhängig von y_1.

Folgerung: Jeder parallel zur y-Achse einfallende Strahl wird so reflektiert, dass der reflektierte Strahl durch $B\left(0 \mid \frac{1}{2}\right)$ geht. Das gilt auch für den Strahl, der auf die Parabel in P (0 | 0) trifft.