Quadratische Gleichungen

Jede quadratische Gleichung lässt sich auf die Form $x^2 + ax = b$ bringen!

1. Ist sofort oder nach Umformung a = 0, so gilt:
   falls b > 0 ist, besitzt die Gleichung genau die beiden Lösungen $x = \sqrt{b}$ und $x = -\sqrt{b}$;
   falls b = 0 ist, existiert nur eine Lösung, nämlich x = 0;
   falls b < 0 ist, existiert keine Lösung.
   Beispiele: $x^2 = \frac{5}{4}$, $x^2 = 0$, $x^2 = -3$

2. Ist sofort oder nach Umformung $b = 0$ und $a \neq 0$, so kann man x ausklammern und erhält als Lösungen $x = 0$ und $x = -a$.
   Beispiel: $x^2 + 2x = 0 \iff x(x+2) = 0$
   $\iff x = 0 \vee x + 2 = 0 \iff x = 0 \vee x = -2$

3. Gilt: $a \neq 0$ und $b \neq 0$, so wird mit Hilfe der quadratischen Ergänzung, die auf beiden Seiten der Gleichung $x^2 + ax = b$ addiert wird, folgendermaßen umgeformt:
   $x^2 + ax = b \iff x^2 + ax + (\frac{a}{2})^2 = b + \frac{a^2}{4}$
   $\iff (x + \frac{a}{2})^2 = \frac{4b + a^2}{4}$

   Nun können wieder drei Fälle auftreten:

   a) $\frac{4b+a^2}{4} < 0$, die quadratische Gleichung hat keine Lösung.
   b) $\frac{4b+a^2}{4} = 0$, die quadratische Gleichung hat genau eine Lösung, nämlich $x = -\frac{a}{2}$.
   c) $\frac{4b+a^2}{4} > 0$, die quadratische Gleichung besitzt genau zwei Lösungen:
   Die Lösungen sind dann: $x = -\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4b+a^2}$ und $x = -\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{4b+a^2}$

   Beispiel zu c):
   $x^2 + \frac{3}{5}x = \frac{3}{4} \iff x^2 + \frac{3}{5}x + (\frac{3}{10})^2 = \frac{75}{100} + \frac{9}{100}$
   $\iff (x + \frac{3}{10})^2 = \frac{21}{25}$
   $\iff |x + \frac{3}{10}| = \sqrt{\frac{21}{25}}$
   $\iff x + \frac{3}{10} = \frac{1}{5}\sqrt{21} \vee x + \frac{3}{10} = -\frac{1}{5}\sqrt{21}$
   $\iff x = -\frac{3}{10} + \frac{1}{5}\sqrt{21} \vee x = -\frac{3}{10} - \frac{1}{5}\sqrt{21}$

4. Manchmal lässt sich zur schnelleren Lösung „der Satz des Vieta“ anwenden, wenn man die Form $x^2 + ax = b$ umformt in $x^2 + ax - b = 0$
   Beispiele: 1. $x^2 + 5x + 6 = 0 \iff (x+3)(x+2) = 0$
   $\iff x + 3 = 0 \vee x + 2 = 0$
   $\iff x = -3 \vee x = -2$

   beachte hierbei:
   der Faktor **a = 5** ergibt sich aus Summe 3 + 2, **b = 6** ergibt sich aus dem Produkt $3 \cdot 2$

   2. $x^2 - 5x - 24 = 0 \iff (x+3)(x-8) = 0$
   $\iff x + 3 = 0 \vee x - 8 = 0$
   $\iff x = -3 \vee x = 8$

   beachte hierbei:
   der Faktor **a = – 5** ergibt sich aus 3 + (– 8), **b = – 24** ergibt sich aus $3 \cdot (-8)$